DEUXIÈME COMPOSITION
(Option agronomie - Option biochimie-biologie) Durée : 3 heures

PREMIER PROBLEME

On désigne par E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, 0_E son élément neutre et par $B = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ sa base canonique. Soit f l'application linéaire de E dans E représentée par la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.a. Déterminer une base du noyau de f.

1.b. Déterminer une base de l'image de f.

1.c. Le noyau et l'image de f sont-ils des espaces supplémentaires? Justifier la réponse.

2. Pour tout λ réel, on pose :

$$E_\lambda = \{u \in E,\ f(u) = \lambda.u\}$$

2.a. Montrer qu'il existe exactement deux valeurs de λ telles que :

$$E_\lambda \neq \{0_E\}$$

On notera α et β ces deux valeurs avec : $\alpha < \beta$

2.b. Montrer que E_α et E_β sont des sous-espaces vectoriels de E. Déterminer une base de chacun d'entre eux.

3.a. Montrer qu'il existe une base $B' = (e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)$ de E dans laquelle f a pour matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On choisira les vecteurs e'_1,e'_2,e'_3 et e'_4 de manière à ce que leurs coordonnées dans la base canonique B soient uniquement des éléments de l'ensemble $\{-1,0,1\}$.

3.b. Quelle est la matrice de passage P de la base B vers la base B'? Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} en indiquant les calculs intermédiaires.

3.c. Calculer T^2 et T^3. Pour n entier supérieur ou égal à 2, exprimer T^n en fonction de n.

3.d. En déduire, pour n entier, l'expression de A^n en fonction de n.

DEUXIEME PROBLEME

Notations et définitions

(X,Y) est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, définie sur l'espace de probabilité (Ω,A,P) et admettant une densité f. On considèrera de plus les deux variables aléatoires Z et T, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies pour tout ω de Ω par :

- $Z(\omega) = \sqrt{X^2(\omega)+Y^2(\omega)}$
- $\begin{cases} T(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)} & \text{si} \quad X(\omega) \neq 0 \\ T(\omega) = 0 & \text{si} \quad X(\omega) = 0 \end{cases}$

On désignera respectivement par F et G les fonctions de répartition de Z et T.
Enfin, R désignera un nombre réel strictement positif et on notera :

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq R^2\}$$

Dans tout le problème, on suppose que la densité f est donnée par :
$f(x,y) = k$ si (x,y) est élément de D_R, $f(x,y) = 0$ si (x,y) n'appartient pas à D_R

1. Déterminer k.

2.a. Représenter graphiquement pour tout t réel le domaine : $B_t = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \dfrac{y}{x} \leq t\right\}$

2.b. Justifier, pour tout t réel, l'égalité :

$$G(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan} t$$

Vérifier que G ainsi définie a bien les propriétés d'une fonction de répartition.

2.c. En déduire une densité de T.

3. Déterminer F et une densité de Z.

4.a. Etudier et représenter graphiquement l'application u définie pour tout élément x de [0,R] par :

$$u(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{R}\right), \text{ si } x \neq \frac{R}{2} \text{ et } u\left(\frac{R}{2}\right) = 0$$

4.b. On définit une variable aléatoire V en posant pour tout ω de Ω :

$$\begin{cases} V(\omega) = \tan\left(\dfrac{\pi}{R} Z(\omega)\right) & \text{si } Z(\omega) \neq \dfrac{R}{2} \\ V(\omega) = 0 & \text{si } Z(\omega) = \dfrac{R}{2} \end{cases}$$

Déterminer la fonction de répartition de V ainsi qu'une densité.